

ШИФР

031

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИпо математике в 11 классе
(наименование общеобразовательного предмета)Фамилия И.О. участника Михеев Никита Сергеевич

Дата рождения

Школа № 2 район _____ город Ижевск**Особые отметки** (Заполняется представителем оргкомитета)
о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

+1 чистовик

Дата проведения 19.01.2025**Правила поведения**Участник очного тура олимпиады **обязан**:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады **запрещается**:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполняющуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному

заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы. Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады)

ШИФР 031
(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
±	+	+	-	15
12	20	20	3	0

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№1

$$2 \cos^4 x - \sin^3 x = 1$$

$$2(\cos^2 x)^2 - \sin^3 x = 1$$

$$2(1 - \sin^2 x)^2 - \sin^3 x = 1$$

$$2(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) - \sin^3 x = 1$$

$$2 - 4\sin^2 x + 2\sin^4 x - \sin^3 x - 1 = 0$$

$$2\sin^4 x - \sin^3 x - 4\sin^2 x + 1 = 0$$

Заменим $t = \sin x$, $-1 \leq t \leq 1$: $2t^4 - t^3 - 4t^2 + 1 = 0$. По-за сложного члена 1 видно, что $t = -1$ — корень. Поделив уравнение на $t + 1$ по формуле Горнера на $t + 1$, получим:

$$(t + 1)(2t^3 - 3t^2 - t + 1) = 0$$

Рассмотрим оставшееся кубическое уравнение. По м. Виета сумма его действительных корней равна $-\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$. Каждый корень: производная этого уравнения равна $6t^2 - 6t - 1 \Rightarrow$ можно максимума — в $t = \frac{3 - \sqrt{25}}{6}$ (-1 по 1), а минимума — в $t = \frac{3 + \sqrt{25}}{6} > 1$. При этом значение куб. функции в $t = \frac{3 + \sqrt{25}}{6} < 0$, т. к. при 1 это значение $= -1 < 0$, функция монотонно убывает. Значит, есть только один корень, и это и есть $\frac{3}{2}$. Итого: $\begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Объемы: $u = \frac{2\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $u = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
 $u = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

№ 3

Обозначим $f(x) = ax^4 + bx + c$. П.к. a, b, c — строго
положительно, то $c < a+b$. Рассмотрим
 $f(x)$ при $x \in \{-1, 0, 1\}$: $a < b+c$

$$f(-1) = a - b - c. \quad a < b+c \Rightarrow f(-1) < 0$$

$$f(0) = -c. \quad a, b, c \text{ — строго положительные} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a, b, c > 0 \Rightarrow f(0) < 0$$

$$f(1) = a + b - c, \text{ п.к. } c < a+b, \text{ то } f(1) > 0$$

Теперь рассмотрим $f'(x) = 4ax^3 + b$. Оно имеет
единственный корень — $x = -\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$, обозначим

его за t . П.к. $a, b > 0$, то $t < 0$. t является
минимумом $f(x)$, п.к. до t $f'(x) < 0$,

после t $f'(x) > 0$. Тут ясно, что $f(x)$ может

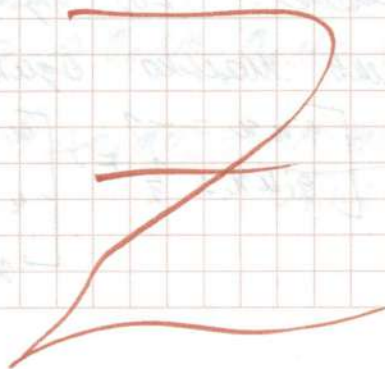
иметь положительные значения при отрицатель-

ных x : пусть $ax^4 > 0$ при $\forall x \Rightarrow$ можно взять

достаточно большой по модулю отрицательный

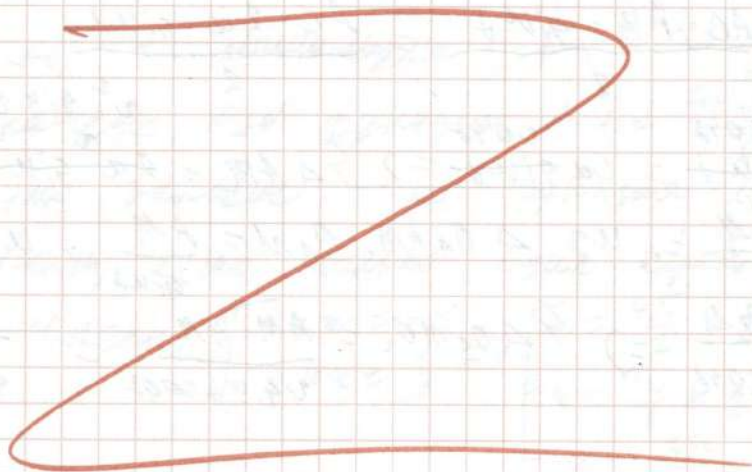
x , что $ax^4 > b$ и т.д. Тогда имеет следующие

свойства о графике $f(x)$:





Т.к. n -го t функция монотонно убывает,
 то содержащая n -ую положительную степень, а
 $f(-1) < 0$, но в $n_1 \in (-1, 0)$ график пересекает
 ось OX - это первый корень. С другой стороны,
 $t \in (0, 1)$ f , но $[t; +\infty)$ $f(u)$ монотонно воз-
 растает, значит и на $[0; 1]$ $f(u)$ возрастает,
 а т.к. $f(0) < 0$, $f(1) > 0$, то на $(0; 1)$ график
 второй раз пересекает OX . Таким образом, не, т.к.
 у $f(u)$ только по одному экстремуму возрастания
 и убывания соответственно. Первый корень
 $n_1 \in (-1, 0)$, второй корень $n_2 \in (0; 1)$, и их знаки
 отличаются и $|n_1| > 1$, $|n_2| < 1 \Rightarrow |n_1| > |n_2|$, т.е.



Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

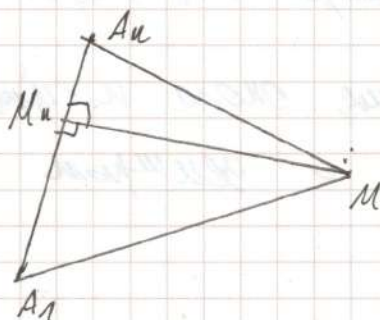
№ 2 (продолжение)

Тогда $\frac{S_{\triangle AM_1}}{S_{\triangle OM_1}} = \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{\frac{a^2}{\sin^2 \alpha}} = \sin^2 2\alpha.$

Ответ: $\sin^2 2\alpha.$

№ 4

Рассмотрим отдельную сторону k -угольника:



M_n — проекция M на $A_1 A_n \Rightarrow$
 $\Rightarrow MM_n \perp A_1 A_n.$
 M_z — проекция

$\sum (A_1 M_1^2 + \dots + A_n M_n^2) = A_1 A_1^2 + \dots + A_n A_n^2$ поско-
льку стороны k являются сторонами $\triangle A_1 M M_n$

Если допустить, что $MA_1 = MA_n$, то MM_n — не только высота, но и медиана $\triangle A_1 M A_n \Rightarrow$

$\Rightarrow A_1 M_n = \frac{1}{2} A_1 A_n$. Возведем в квадрат, получим

$A_1 M_n^2 = \frac{1}{4} A_1 A_n^2$; $\sum A_1 M_n^2 = \frac{1}{4} \sum A_1 A_n^2$. Продолжая также рас-
суждения с каждой стороной, получим систему

$$\begin{cases} \chi_{A_1} M_1^v = A_1 A_1^v \\ \chi_{A_2} M_2^v = A_2 A_2^v \\ \dots \\ \chi_{A_n} M_n^v = A_n A_n^v \end{cases}$$

(можна все переписати, отримавши

$$\text{и зматриваючи дане} - \chi(A_1 M_1^v + A_2 M_2^v + \dots + A_n M_n^v) =$$

$$= A_1 A_1^v + A_2 A_2^v + \dots + A_n A_n^v. \text{ Доводиться, що для}$$

дане рівняння виконується тоді и
тільки тоді, коли $M_{A_1} = M_{A_2} = \dots = M_{A_n}$

(из першої пари $M_{A_1} = M_{A_2}$, из другої $M_{A_2} = M_{A_3}$ и т. д.)

$\Rightarrow M_{A_1} = M_{A_2} = M_{A_3}$ и т. д.). Значить, околом n -гранника можна описати сферу с центром M и радиусом M_{A_1} , т. е. д.

~~н ч а)~~

~~$n^{6n} = \frac{1}{9}$. При $n \geq 1$ не корень.~~

~~или $0 < n < 1$ единственный корень $n = \frac{1}{3}$,
 а иначе нет, т. е. функции будет строго возрастающей.~~

~~Ответ: 1~~

~~н ч б)~~

~~Чем. При $n = 1$ и $n = 0$, очевидно, не корень. Предположим~~

~~$$n^{6n} = (n^n)^6 = \frac{1}{9} \Rightarrow n^n = \sqrt[6]{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{3}}} = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{-1} = 3^{-\frac{1}{3}} =$$~~
~~$$= \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}. \text{ Тогда единственный корень } n = \frac{1}{3}.$$~~

Ответ: а) 1 б) нет.